Hoofdstuk 12B - Breuken en functies

Voorkennis

V-1a $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

b $\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}=1\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$

c $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

d $\frac{5}{12}-\frac{1}{10}=\frac{25}{60}-\frac{6}{60}=\frac{19}{60}$

e $3\frac{5}{7}-1\frac{2}{3}=\frac{26}{7}-\frac{5}{3}=\frac{78}{21}-\frac{35}{21}=\frac{43}{21}=2\frac{1}{21}$

f $2\frac{7}{9}+4\frac{3}{5}=\frac{25}{9}+\frac{23}{5}=\frac{125}{45}+\frac{207}{45}=\frac{332}{45}=7\frac{17}{45}$

g $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$

h $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{72}=\frac{1}{12}$

i $\frac{5}{6}\cdot-\frac{4}{13}=-\frac{20}{78}=-\frac{10}{39}$

j $\frac{-5}{18}\cdot\frac{3}{10}=\frac{-15}{180}=-\frac{1}{12}$

k $\frac{6}{7}\cdot1\frac{1}{2}=\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{18}{14}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$

l $2\frac{1}{2}\cdot1\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$

V-2a Elk stukje wordt 1 : 10 = 0,1 meter.

b

a	1	2	10	20	50	100
L	1	0,5	0,1	0,05	0,02	0,01

c De lengte van elk stukje wordt dan twee keer zo klein.

d Het verband tussen a en L is omgekeerd evenredig.

e $a\cdot L=1$, $a=\frac{1}{L}$ en $L=\frac{1}{a}$

f $a = 1000$ geeft $L = 1 : 1000 = 0{,}001$

g $L = 0{,}004$ geeft $a = 1 : 0{,}004 = 250$

V-3a Bij de linkertabel is het product van x en y telkens 24.
In deze tabel zijn x en y dus omgekeerd evenredig.
In de rechtertabel is het product van x en y niet steeds hetzelfde, dus zijn x en y hier niet omgekeerd evenredig.

b Linkertabel: $x\cdot y=24$ of $x=\frac{24}{y}$ of $y=\frac{24}{x}$
Rechtertabel: Als x twee keer zo groot wordt, wordt y ook twee keer zo groot.
Het verband tussen x en y is recht evenredig, met evenredigheidsconstante 3.
Een formule bij de rechtertabel is $y = 3x$.

V-4a

x	0	1	2	3	3,9	4	4,1	5	10
y	–0,5	–0,67	–1	–2	–20	-	20	2	0,33

b Bij $x = 4$ is de noemer van de breuk gelijk aan 0 en dan bestaat de breuk niet. Je kan niet delen door 0.

c Van de breuk blijft de teller constant, maar de noemer wordt steeds groter.
De uitkomst van de breuk wordt dan steeds kleiner en nadert naar 0.

d Als x steeds kleiner wordt, dus bijvoorbeeld $x = -100$ of $x = -1000$, nadert de uitkomst van de breuk ook naar 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

V-5a

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	1,75	1,67	1,5	1	-	3	2,5	2,33

b Bij $x = 3$ is er geen functiewaarde.

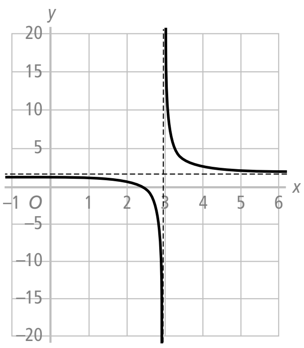
c $k(10) \approx 2{,}14$
$k(100) \approx 2{,}01$
$k(1000) \approx 2{,}001$

d De uitkomst van de breuk nadert dan naar 0, dus de functiewaarden naderen dan naar $2 + 0$, dus 2.

e Van de breuk blijft de teller constant, maar de noemer nadert dan naar 0. Als je een constante deelt door een getal dat naar 0 nadert is de uitkomst heel groot.
De functiewaarden worden dan heel groot (of heel klein, bijvoorbeeld –10 000).

f De verticale asymptoot is de lijn $x = 3$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

g



h Met de vergelijking $2 + \dfrac{1}{x-3} = 2$ bereken je de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van k met de lijn $y = 2$. De lijn $y = 2$ is de horizontale asymptoot en die lijn snijdt de grafiek niet.

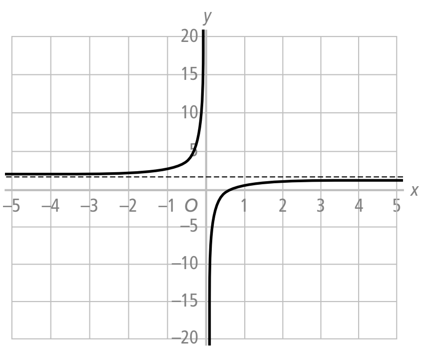
V-6a De verticale asymptoot is de lijn $x = -1$, dus bij $x = -1$ is er geen functiewaarde.

b De horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$, dus de functiewaarden naderen naar de waarde 1 voor waarden van x ver van 0.

c Omdat er bij $x = -1$ geen functiewaarde is, is $x - a$ gelijk aan 0 bij $x = -1$.
$-1 - a = 0$ geeft $a = -1$.

d

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1,67	2	3	-	-1	0	0,33	0,5



© Noordhoff Uitgevers bv

12B-1 Rekenen met breuken

1a

x	0	2	4	6	8	10
y	0	$1\frac{2}{7}$	$2\frac{4}{7}$	$3\frac{6}{7}$	$5\frac{1}{7}$	$6\frac{3}{7}$

b Per stap van 2 is de toename telkens $1\frac{2}{7}$, dus constant. Dus is f een lineaire functie.

c $f(x)=\dfrac{9x}{14}$

2a $f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

$f(-6)=\frac{-6}{3}+\frac{-6}{4}=-3\frac{1}{2}$

b $f(x)=\dfrac{4x}{12}+\dfrac{3x}{12}$

$f(x)=\dfrac{7x}{12}$

c $\dfrac{7x}{12}=14$

$7x=168$

$x=24$

3a $48\cdot\frac{1}{3}=\frac{48}{3}=16$, $48:3=16$ en éénderde deel van 48 is $48:3=16$.
Ze krijgen hetzelfde antwoord.

b A $\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}$ B $\frac{1}{7}\cdot 12=\frac{12}{7}$ C $\frac{2}{9}\cdot x=\dfrac{2x}{9}$

c A $\dfrac{3p}{7}=\frac{3}{7}\cdot p$ B $\dfrac{8a}{13}=\frac{8}{13}\cdot a$ C $\dfrac{5x}{8}=\frac{5}{8}\cdot x$

4a $f(x)=\dfrac{x}{5}+\dfrac{3x}{5}$ is gelijk aan $f(x)=\dfrac{4x}{5}$

b $g(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x$ is gelijk aan $g(x)=\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}x$ dus $g(x)=1\frac{1}{4}x$

c $h(x)=\dfrac{2x}{5}+\dfrac{x}{7}$ is gelijk aan $h(x)=\dfrac{14x}{35}+\dfrac{5x}{35}$ dus $h(x)=\dfrac{19x}{35}$

d $k(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x}$ is gelijk aan $k(x)=\dfrac{5}{x}$

5a Bij de tweede stap lekt niet $\frac{1}{7}$ deel van 900 liter weg maar $\frac{1}{7}$ deel van wat over is na de eerste stap.

b Na de eerste stap is nog $\frac{14}{15}$ deel over. Nadat eerst $\frac{1}{15}$ deel is weggelekt, lekt daarna nog $\frac{1}{7}$ deel van $\frac{14}{15}$ weg. In totaal is dat $\frac{1}{15}+\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{15}$ deel.

c Eerst lekt $\frac{1}{15}\cdot 900=60$ liter weg. Daarna lekt $\frac{1}{7}\cdot(900-60)=\frac{1}{7}\cdot 840=120$ liter weg.
In totaal lekt 60 + 120 = 180 liter weg.

d $\frac{1}{15}+\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{15}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ deel lekt weg.
Controle: $\frac{1}{5}$ deel van 900 is 900 : 5 = 180 liter.

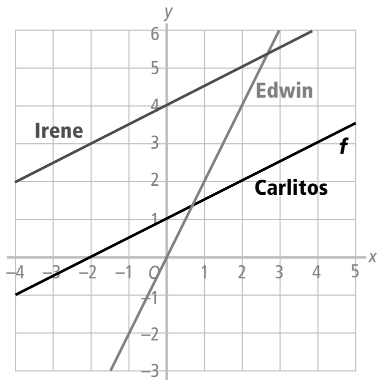
© Noordhoff Uitgevers bv

6a $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ **d** $\frac{8x}{4x^2} = \frac{2}{x}$ **g** $3x \cdot \frac{2}{15} = \frac{6x}{15} = \frac{2x}{5}$

b $5 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ **e** $\frac{1}{3x} \cdot \frac{6x}{x} = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}$ **h** $\frac{2x}{5} \cdot \frac{3}{10x^2} = \frac{6x}{50x^2} = \frac{3}{25x}$

c $\frac{2}{x} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{7x}$ **f** $\frac{12x}{16} \cdot \frac{2}{9} = \frac{24x}{144} = \frac{x}{6}$ **i** $\frac{2}{3x^2} \cdot \frac{9x^2}{16x} = \frac{18x^2}{48x^3} = \frac{3}{8x}$

7a/b Zie de figuur hiernaast.



c Carlitos heeft het goed gedaan.

d Edwin heeft gewoon de vieren weggelaten.
Irene heeft wel de term 2x door 4 gedeeld,
maar niet de term 4 in de teller door 4 gedeeld.

e $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

f $g(x) = \frac{6-8x}{4}$ is gelijk aan $g(x) = \frac{1}{4}(6-8x)$

en dus $g(x) = 1\frac{1}{2} - 2x$

$h(x) = \frac{-10x+15}{-4}$ is gelijk aan

$h(x) = -\frac{1}{4}(-10x+15)$ en dus $h(x) = 2\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}$

$k(x) = \frac{12(2x+3)}{6}$ is gelijk aan $k(x) = \frac{12}{6}(2x+3)$ ofwel $k(x) = 2(2x+3)$

en dus $k(x) = 4x + 6$

12B-2 Gebroken functies

8a

x	1	2	3	4	5
y	12	24	36	48	60

b Delen door 0 is niet mogelijk.

c Tussen x en y is een recht evenredig verband, met als formule $y = 12x$ (voor $x \neq 0$).

d Voor $x = -2$ is de noemer van de breuk gelijk en 0 en delen door 0 is niet mogelijk.

e

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	5

Uit de tabel blijkt dat het functievoorschrift van g te schrijven is als $g(x) = x$.

9a Bij $x = 2$ bestaat $g(x)$ niet, want delen door 0 is niet mogelijk.

b

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	–3	–2	-	0	1	2
$h(x)$	–3	–2	–1	0	1	2

g is gelijk aan h behalve voor $x = 2$.

c $teller = x^2 - 5x + 6$ kun je ontbinden in $teller = (x-2)(x-3)$.

d $g(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$, teller en noemer delen door $x - 2$ geeft $g(x) = x - 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

10a $f(x) = 8x$ als $x \neq 0$

b $g(x) = \dfrac{7(x+2)}{x+2}$

$g(x) = 7$ als $x \neq -2$

c $h(t) = -2t^2$

d $l(p) = -5p$ als $p \neq 0$

e $j(x) = \dfrac{5x(x+3)}{5x}$

$j(x) = x + 3$ als $x \neq 0$

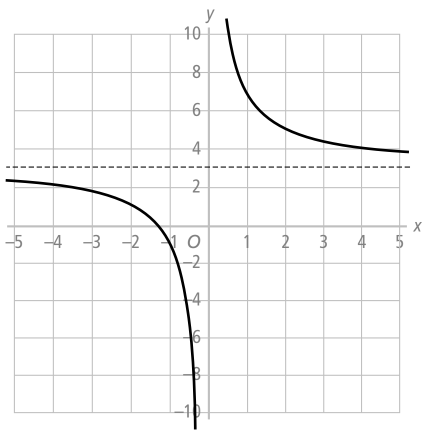
f $k(a) = \dfrac{(a+2)(a+1)}{a+2}$

$k(a) = a + 1$ als $a \neq -2$

11a

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	1	–1	-	7	5	4,33	4

b



c

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	1	–1	-	7	5	4,33	4

d De functies g en h zijn hetzelfde.

12a $p(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{2x}$ is gelijk aan $p(x) = \dfrac{x^2}{2x} + \dfrac{5x}{2x}$ en dus $p(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, mits $x \neq 0$.
De functies p en q zijn hetzelfde.

b Bij de functie $p(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{2x}$ geeft bij $x = 0$ geen uitkomst, want delen door 0 is niet mogelijk.

Bij de functie $q(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ krijg je bij $x = 0$ wel een uitkomst, $q(0) = 2\frac{1}{2}$.

c $d(x) = \dfrac{18x - 15}{3x}$ is gelijk aan $d(x) = \dfrac{18x}{3x} - \dfrac{15}{3x}$ dus $d(x) = 6 - \dfrac{5}{x}$

$r(x) = \dfrac{1 + x^2}{x}$ is gelijk aan $r(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{x}$ dus $r(x) = \dfrac{1}{x} + x$

$s(x) = \dfrac{3x - 8x^2}{2x}$ is gelijk aan $s(x) = \dfrac{3x}{2x} - \dfrac{8x^2}{2x}$ dus $s(x) = 1\frac{1}{2} - 4x$ als $x \neq 0$

13a Schrijf 3 als de breuk $\frac{3}{1}$ en vermenigvuldig teller en noemer met x.

b Antwoord C is goed. Als je de tellers $3x$ en 7 bij elkaar optelt krijg je $3x + 7$.
Bij het optellen van gelijknamige breuken tel je alleen de tellers bij elkaar op, de noemers niet. Antwoord D is dus fout.

© Noordhoff Uitgevers bv

14a Schrijf 4 als de breuk $\frac{4}{1}$ en vermenigvuldig teller en noemer met $x + 2$. je krijgt dan de breuk $\dfrac{4(x+2)}{1(x+2)}$. Werk vervolgens de haakjes weg en je hebt $\dfrac{4x+8}{x+2}$.

b $f(x) = 4 + \dfrac{3}{x+2}$ is gelijk aan $f(x) = \dfrac{4x+8}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

Optellen geeft $f(x) = \dfrac{4x+8+3}{x+2}$ en dus $f(x) = \dfrac{4x+11}{x+2}$

15a $k(x) = 5 + \dfrac{4}{x-7}$ is gelijk aan $k(x) = \dfrac{5(x-7)}{x-7} + \dfrac{4}{x-7}$

Optellen geeft $k(x) = \dfrac{5(x-7)+4}{x-7}$ en dus $k(x) = \dfrac{5x-31}{x-7}$

b $m(x) = 1 + \dfrac{15}{5x-9}$ is gelijk aan $m(x) = \dfrac{5x-9}{5x-9} + \dfrac{15}{5x-9}$

Optellen geeft $m(x) = \dfrac{5x-9+15}{5x-9}$ en dus $m(x) = \dfrac{5x+6}{5x-9}$

c $l(x) = -2 + \dfrac{10}{3x+4}$ is gelijk aan $l(x) = \dfrac{-2(3x+4)}{3x+4} + \dfrac{10}{3x+4}$

Optellen geeft $l(x) = \dfrac{-2(3x+4)+10}{3x+4}$ en dus $l(x) = \dfrac{-6x+2}{3x+4}$

d $n(x) = x + \dfrac{7}{x}$ is gelijk aan $n(x) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{7}{x}$

Optellen geeft $n(x) = \dfrac{x^2+7}{x}$

12B-3 Grafieken van gebroken functies

16a De functie bestaat niet voor $x = 0$.

b $f(1000) = 1{,}002$ en $f(-1000) = 0{,}998$

c Voor waarden van x ver van 0 nadert de uitkomst van de breuk $\dfrac{2}{x}$ naar 0, maar wordt nooit gelijk aan 0. Voor waarden van x ver van 0 nadert de functiewaarde dus naar $0 + 1 = 1$, maar wordt nooit gelijk aan 1.

d $f(0{,}001) = 2001$ en $f(-0{,}001) = -1999$

e Om de coördinaten van een snijpunt met de y-as te berekenen moet je $x = 0$ in de functie invullen. Maar de functie bestaat niet voor $x = 0$, dus is er geen snijpunt met de y –as.

17a De grafiek snijdt de y-as niet want de functie bestaat niet voor $x = 0$.

b Omdat $x^2 > 0$ voor iedere waarde van $x \neq 0$ is $g(x) > 0$ voor iedere waarde voor $x \neq 0$.

c $g(1000) = 0{,}00001$ en $g(-1000) = 0{,}00001$

d De vergelijking $\dfrac{10}{x^2} = 0$ heeft geen oplossingen. Voor waarden van x ver van 0 komt $\dfrac{10}{x^2}$ wel steeds dichter bij 0.

© Noordhoff Uitgevers bv

18a

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0,77	1,25	2	2,5	2	1,25	0,77

b Bij $x = 0$ bestaat de functie $h(x)$ wel.

c De vergelijking $\frac{10}{x^2+4} = 0$ heeft geen oplossingen.

19a Bij $x = 2$ bestaat de functie niet, dus de lijn $x = 2$ is de verticale asymptoot.

b $f(1000) \approx 4{,}012$

c Voor waarden van x ver van 0 nadert de uitkomst van de breuk $\frac{12}{x-2}$ naar 0.

Voor waarden van x ver van 0 nadert de functiewaarde dus naar $4 + 0 = 4$.

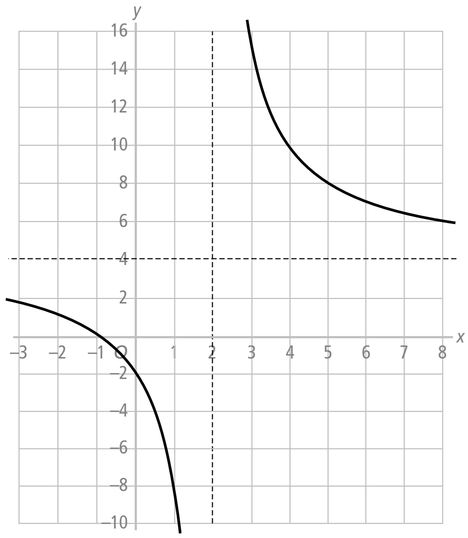
De grafiek van f nadert daardoor de lijn $y = 4$ en dus is de lijn $y = 4$ de horizontale asymptoot.

d $4 + \frac{12}{x-2} = 4$ geeft $\frac{12}{x-2} = 0$

Als de teller van een breuk ongelijk is aan 0, kan de uitkomst ook geen 0 zijn.
Deze vergelijking heeft dus geen oplossingen.

e/f

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,6	1	0	–2	–8	-	16	10	8	7	6,4	6



20a $f(x) = 4 + \frac{12}{x-2}$ is gelijk aan $f(x) = \frac{4(x-2)}{x-2} + \frac{12}{x-2}$

Optellen geeft $f(x) = \frac{4(x-2)+12}{x-2}$ en dus $f(x) = \frac{4x+4}{x-2}$

b De uitkomst van een breuk is gelijk aan 0 als de teller van de breuk gelijk is aan 0.

De noemer kan geen 0 zijn.

c $\frac{4x+4}{x-2} = 0$ als $4x + 4 = 0$

$4x = -4$

$x = -4 : 4$ dus $x = -1$

© Noordhoff Uitgevers bv

21a $g(x) = -2 + \frac{5}{x+1}$ is gelijk aan $g(x) = \frac{-2(x+1)}{x+1} + \frac{5}{x+1}$

Optellen geeft $g(x) = \frac{-2(x+1)+5}{x+1}$ en dus $g(x) = \frac{-2x+3}{x+1}$

De functies g en h zijn hetzelfde.

b In het functievoorschrift van g zie je dat de breuk $\frac{5}{x+1}$ naar 0 nadert voor waarden van x ver weg van 0. Dat kun je in het functievoorschrift van h niet zien.

Het functievoorschrift van g is dus handiger om te bepalen welke lijn de horizontale asymptoot is.

c De horizontale asymptoot is de lijn $y = -2$.

d Omdat het functievoorschrift van h als één breuk is geschreven kun je daarmee sneller de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de x-as berekenen.

e $\frac{-2x+3}{x+1} = 0$ als $-2x + 3 = 0$ (en $x + 1 \neq 0$)

$-2x = -3$

$x = -3 : -2$ dus $x = 1\frac{1}{2}$

Het snijpunt met de x-as is het punt $(1\frac{1}{2}, 0)$.

22a De noemer is 0 voor $x^2 - 4 = 0$. Dus voor $x^2 = 4$ ofwel $x = -2$ of $x = 2$.

Dus voor $x = 2$ en $x = -2$ is er een verticale asymptoot.

b Voor waarden van x ver weg van 0 nadert de uitkomst van de breuk naar 0.

De grafiek nadert dus naar de lijn $y = 0$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$ (de x-as).

c De noemer wordt nooit 0 want de vergelijking $x^2 + 4 = 0$ heeft geen oplossingen.

d Voor de coördinaten van een snijpunt met de x-as geldt $\frac{5}{x^2+4} = 0$. Omdat de teller van deze breuk nooit gelijk kan zijn aan 0, is er geen oplossing. En dus is er geen snijpunt met de x-as.

23a De grafiek van f ontstaat uit die van k door deze 2 omhoog te schuiven.

b De grafiek van k snijdt de y-as voor $x = 0$ en $y = k(0) = -1\frac{1}{4}$.

Als de grafiek van k 2 omhoog schuift, verschuift dit snijpunt naar $(0, \frac{3}{4})$. Het stuk van de grafiek tussen de verticale asymptoten komt daarmee gedeeltelijk boven de x-as en gedeeltelijk onder de x-as te liggen. Dus snijdt de grafiek van f de x-as.

c $f(x) = 2 + \frac{5}{x^2-4}$ is gelijk aan $f(x) = \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} + \frac{5}{x^2-4}$

Optellen geeft $f(x) = \frac{2(x^2-4)+5}{x^2-4}$ en dus $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2-4}$

In de snijpunten met de x-as geldt $\frac{2x^2-3}{x^2-4} = 0$

$2x^2 - 3 = 0$ (en $x^2 - 4 \neq 0$)

$2x^2 = 3$

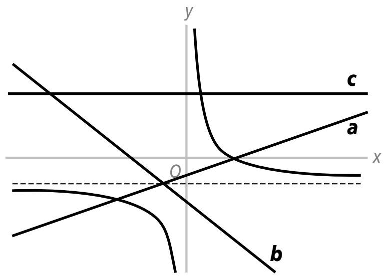
$x^2 = 1{,}5$ dus $x = -\sqrt{1{,}5}$ of $x = \sqrt{1{,}5}$

De snijpunten met de x-as zijn $(-\sqrt{1{,}5}, 0)$ en $(\sqrt{1{,}5}, 0)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

12B-4 Vergelijkingen oplossen

24a

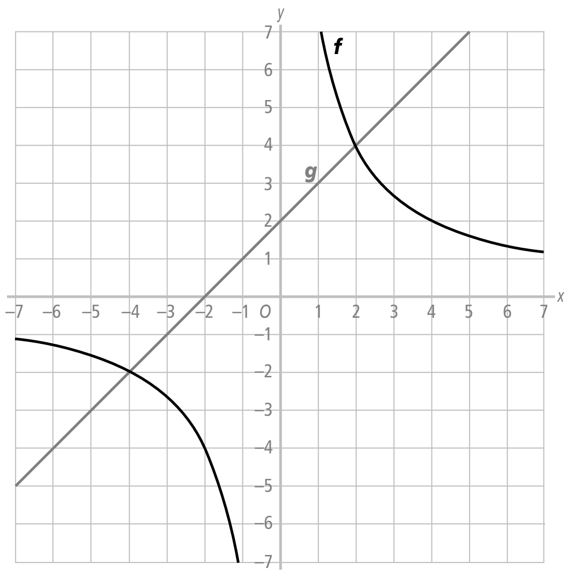


b Ja, er zijn meerdere lijnen mogelijk.

c Ja, ook hier zijn meerdere lijnen mogelijk.

d Nee, je kunt geen lijn trekken die meer dan twee snijpunten heeft met de hyperbool.

25a



b De snijpunten zijn (–4, –2) en (2, 4).

$f(-4) = \frac{8}{-4} = -2;\ \ g(-4) = -4 + 2 = -2$, klopt

$f(2) = \frac{8}{2} = 4;\ \ g(2) = 2 + 2 = 4$, klopt

26a $8 = x^2 + 2x$

b $x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

$x + 4 = 0$ of $x - 2 = 0$

$x = -4$ of $x = 2$

c $g(-4) = -2$ en $g(2) = 4$

27a $x \cdot \frac{3}{x} = x(x - 2)$ mits $x \neq 0$

$3 = x^2 - 2x$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$

$x = 3$ of $x = -1$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $(x-1)\cdot\dfrac{-2}{x-1}=(x-1)(2x+3)$ mits $x\neq 1$

$-2 = 2x^2 + 3x - 2x - 3$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$(x+1)(x-\frac{1}{2})=0$

$x + 1 = 0$ of $x - \frac{1}{2} = 0$

$x = -1$ of $x = \frac{1}{2}$

c $x\cdot(\dfrac{5}{x}+2)=x\cdot 4$ mits $x\neq 0$

$5 + 2x = 4x$

$5 = 2x$

$x = 2\frac{1}{2}$

d $(x-3)\cdot(2x+7)=(x-3)\cdot\dfrac{-6}{x-3}$ mits $x\neq 3$

$2x^2 + 7x - 6x - 21 = -6$

$2x^2 + x - 15 = 0$

abc-formule met $a = 2, b = 1$ en $c = -15$

$D = 1^2 - 4 \times 2 \times -15 = 121$

$x=\dfrac{-1+\sqrt{121}}{2\cdot 2}=\dfrac{-1+11}{4}=\dfrac{10}{4}$ dus $x = 2\frac{1}{2}$ of

$x=\dfrac{-1-\sqrt{121}}{2\cdot 2}=\dfrac{-1-11}{4}=\dfrac{-12}{4}$ dus $x = -3$

28a $(x+1)\cdot\dfrac{-8}{x+1}=(x+1)\cdot(2x-6)$ mits $x\neq 1$

$-8 = 2x^2 + 2x - 6x - 6$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)(x-1) = 0$

$x - 1 = 0$ dus $x = 1$

b $(x+1)\cdot\dfrac{-8}{x+1}=(x+1)\cdot(2x-4)$ mits $x\neq -1$

$-8 = 2x^2 + 2x - 4x - 4$

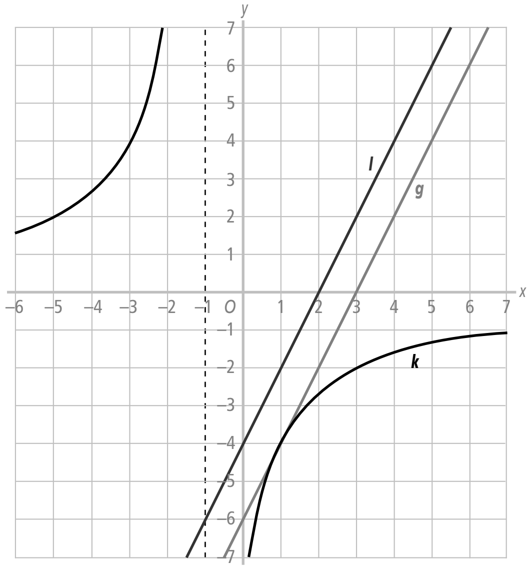
$2x^2 - 2x + 4 = 0$

$D = (-2)^2 - 4\cdot 2\cdot 4 = -28;\ D < 0$

Geen oplossingen.

© Noordhoff Uitgevers bv

c



De grafiek van l snijdt de hyperbool niet, dus heeft de vergelijking geen oplossing.

29a $x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x+3 = 0$ of $x-1 = 0$

$x = -3$ of $x = 1$

b $x \cdot \frac{3}{x} = x \cdot (x+2)$

$3 = x^2 + 2x$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = -3$ of $x = 1$

Ja, Mathilde krijgt hetzelfde antwoord als Melanie.

30a $-2x + 10 = 4 - \frac{20}{x}$

$-2x + 6 = -\frac{20}{x}$

$x \cdot (-2x+6) = x \cdot -\frac{20}{x}$ mits $x \neq 0$

$-2x^2 + 6x = -20$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$

$x-5 = 0$ of $x+2 = 0$

$x = 5$ of $x = -2$

$x = 5$ geeft $y = f(5) = 0$

$x = -2$ geeft $y = f(-2) = 14$

De snijpunten zijn $(5, 0)$ en $(-2, 14)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\frac{-3}{x} - 1 = 3x - 1$

$\frac{-3}{x} = 3x$

$x \cdot \frac{-3}{x} = x \cdot 3x$ mits $x \neq 0$

$-3 = 3x^2$

$x^2 = -1$; geen oplossingen

Er zijn geen snijpunten.

c $\frac{2}{x+1} = 2x - 3$

$(x+1) \cdot \frac{2}{x+1} = (x+1) \cdot (2x-3)$ mits $x \neq -1$

$2 = (x+1)(2x-3)$

$2 = 2x^2 - 3x + 2x - 3$

$2x^2 - x - 5 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 41$

$x = \frac{1+\sqrt{41}}{4} \approx 1,85$ of $x = \frac{1-\sqrt{41}}{4} \approx -1,35$

$x \approx 1,85$ geeft $y \approx n(1,85) \approx 0,7$

$x \approx -1,35$ geeft $y \approx n(-1,35) \approx -5,7$

De snijpunten zijn (1,85; 0,7) en (–1,35; –5,7).

d $\frac{7}{x+2} + 2 = -5x$

$\frac{7}{x+2} = -5x - 2$

$(x+2) \cdot \frac{7}{x+2} = (x+2) \cdot (-5x-2)$ mits $x \neq -2$

$7 = (x+2)(-5x-2)$

$7 = -5x^2 - 10x - 2x - 4$

$5x^2 + 12x + 11 = 0$

$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 11 = -76$; $D < 0$; geen oplossingen

Er zijn geen snijpunten.

31a $x \cdot (\frac{6}{x} + 3) = x \cdot \frac{14}{2x-1}$ geeft $6 + 3x = \frac{14x}{2x-1}$

$(2x-1) \cdot (6+3x) = (2x-1) \cdot \frac{14x}{2x-1}$ geeft dan $(2x-1)(6+3x) = 14x$

b $12x + 6x^2 - 6 - 3x = 14x$

$6x^2 - 5x - 6 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -6 = 169$

$x = \frac{5+\sqrt{169}}{2 \cdot 6} = \frac{5+13}{12} = \frac{18}{12}$ of $x = \frac{5-\sqrt{169}}{2 \cdot 6} = \frac{5-13}{12} = \frac{-8}{12}$

dus $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -\frac{2}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

32a Dré: $t = \frac{80}{v}$

b Ed rijdt 4 km sneller dus daarom $v + 4$.
Ed komt één uur eerder aan daarom moet je om de tijden aan elkaar gelijk te stellen één uur optellen bij de tijd van Ed.

c $\frac{80}{v} - 1 = \frac{80}{v+4}$

$v \cdot \left(\frac{80}{v} - 1\right) = v \cdot \frac{80}{v+4}$

$80 - v = \frac{80v}{v+4}$

$(v+4)\cdot(80-v) = (v+4)\cdot\frac{80v}{v+4}$

$(v+4)(80-v) = 80v$

$80v - v^2 + 320 - 4v = 80v$

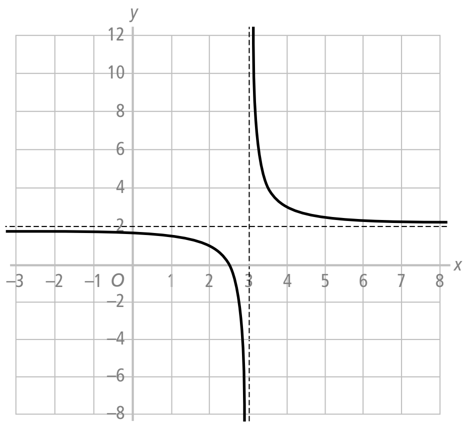
$-v^2 - 4v + 320 = 0$

$D = (-4)^2 - 4\cdot -1\cdot 320 = 1296$, dus $v = \frac{4+\sqrt{1296}}{-2} = -20$ of $v = \frac{4-\sqrt{1296}}{-2} = 16$

De oplossing is $v = 16$ ($v = -20$ valt hier natuurlijk af).
De gemiddelde snelheid van Dré is 16 km/uur en die van Ed is 16 + 4 = 20 km/uur.

12B-5 Gemengde opdrachten

33a Zie de grafiek hiernaast.



b $f(1) = 4$ dus $\frac{1}{1-3} + a = 4$
$-\frac{1}{2} + a = 4$
$a = 4\frac{1}{2}$

c Voor $a = -5$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -5$.

d Dan moet de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$ zijn.
Dat is het geval als $a = 0$.

34a $T(0) = 20 + \frac{24}{2} = 32$
De temperatuur bij het begin is dus 32 °C.

b Neem bijvoorbeeld $t = 1000$
$T(1000) = 20 + \frac{24}{502} = 20{,}05$
Voor grote waarden van t nadert de temperatuur naar 20.
Het wordt op den duur dus 20 °C.

c $20 + \frac{24}{\frac{1}{2}t+2} = 22{,}5$, geeft $\frac{24}{\frac{1}{2}t+2} = 2{,}5$

$(\frac{1}{2}t+2)\cdot\frac{24}{\frac{1}{2}t+2} = 2{,}5\cdot(\frac{1}{2}t+2)$ mits $t \neq -4$

$24 = 1{,}25t + 5$

$1{,}25t = 19$, dus $t = 19 : 1{,}25$

$t = 15{,}2$, dus na 15,2 minuten (dat is 15 minuten en 12 seconden)

© Noordhoff Uitgevers bv

35a Met één kraan open duurt het $3 \times 200 = 600$ minuten.

b Met twee kranen open duurt het $600 : 2 = 300$ minuten.

c Met één kraan open duurt het 600 minuten. Met de kraan half open duurt het dus $2 \times 600 = 1200$ minuten. En dat is $1200 : 60 = 20$ uur.

d Met 2,5 kranen open gaat het twee en een half keer zo snel als met één kraan open. Het duurt dus $600 : 2{,}5 = 240$ minuten

e

aantal kranen geopend	$\frac{1}{2}$	1	2	2,5	3
tijd in minuten	1200	600	300	240	200

f $t = \dfrac{600}{k}$

g 2,5 uur komt overeen met $2{,}5 \times 60 = 150$ minuten

$150 = \dfrac{600}{k}$

$k = 4$; er moeten vier kranen open staan.

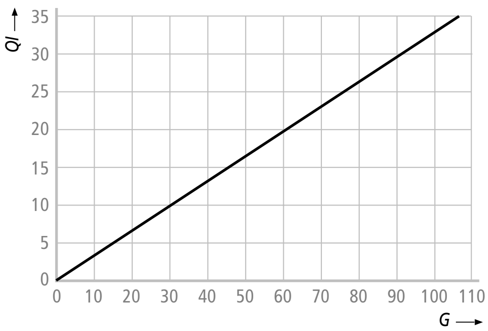
36a $QI = \dfrac{75}{1{,}75^2} = 24{,}49$

b $QI = \dfrac{1}{l^2} \cdot G$

$QI = \dfrac{1}{1{,}75^2} \cdot G$

$QI \approx 0{,}33 \cdot G$

c



d Bij een gewicht van meer dan 76 kg.

e Voor $G = 80$ is $QI = \dfrac{80}{l^2}$

f $25 = \dfrac{80}{l^2}$

$l^2 \cdot 25 = l^2 \cdot \dfrac{80}{l^2}$ geeft $25l^2 = 80$

$l^2 = 3{,}2$ geeft $l \approx 1{,}79$

Bij een lengte van minder dan 1,79 m is iemand van 80 kg te zwaar.

© Noordhoff Uitgevers bv

37a Als $x^2 - 3x - 4 = 0$ bestaat f niet.
$(x - 4)(x + 1) = 0$
$x - 4 = 0$ of $x + 1 = 0$
$x = 4$ of $x = -1$
De functie f bestaat niet voor $x = 4$ of $x = -1$.

b $f(x) = \dfrac{3x-12}{x^2-3x-4}$ is gelijk aan $f(x) = \dfrac{3(x-4)}{(x-4)(x+1)}$

Teller en nemer delen door $x - 4$ geeft $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ mits $x \neq 4$.

c Voor $x = 4$ zijn de functies f en g niet gelijk. Functie f bestaat niet voor $x = 4$, maar functie g wel.

38a $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{5}{40} - \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{40}$

$b = 40$; de beeldafstand is 40 cm.

b $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{12}$

$\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{b}$

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{3}{24} - \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{24}$

$b = 24$; de beeldafstand is 24 cm.

c $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{v}$

$0{,}125 - \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{b}$

$b \cdot (0{,}125 - \dfrac{1}{v}) = b \cdot \dfrac{1}{b}$

$b \cdot (0{,}125 - \dfrac{1}{v}) = 1$

$b = \dfrac{1}{0{,}125 - \dfrac{1}{v}}$

d $\dfrac{1}{f}$ wordt kleiner en v blijft gelijk. De noemer van opdracht c wordt dan kleiner en daarmee de uitkomst van de breuk groter. De beeldafstand b wordt groter.

ICT Grafieken van gebroken functies

I-1a $x = 0$

b

x	10	20	100	200	1000
y	1,2	1,1	1,02	1,01	1,00

c $f(1000) = 1{,}002$

© Noordhoff Uitgevers bv

d Voor grote waarden van x nadert $\frac{2}{x}$ naar 0, maar wordt nooit gelijk aan 0.
De uitkomst van $\frac{2}{x}+1$ nadert dus naar 1, maar wordt nooit gelijk aan 1.

e Voor $x = 0$ staan er kruisjes in de tabel.

f

x	–0,1	–0,01	–0,001	0	0,001	0,01	0,1
y	–19	–199	–1999	-	2001	201	21

g De functiewaarden worden erg groot (positief en negatief), de grafiek loopt steil naar beneden en steil omhoog.

I-2a De grafiek snijdt de y-as niet want de functie bestaat niet voor $x = 0$.

b Omdat $x^2 > 0$ voor iedere waarde van $x \neq 0$ is $g(x) > 0$ voor iedere waarde voor $x \neq 0$.

c $g(1000) = 0,00001$ en $g(-1000) = 0,00001$

d De vergelijking $\frac{10}{x^2} = 0$ heeft geen oplossingen. Voor waarden van x ver van 0 komt $\frac{10}{x^2}$ wel steeds dichter bij 0.

I-3a Bij $x = 0$ staan kruisjes.

b De grafiek snijdt de y-as nu wel, bij $(0, 100)$.

c De grafieken snijden de y-as.
Voor $b = 0{,}25$ is het snijpunt $(0, 40)$.
Voor $b = 0{,}5$ is het snijpunt $(0, 20)$.
Voor $b = 5$ is het snijpunt $(0, 2)$.

d Voor $b = 0$ is $g(x) = \frac{10}{x^2}$ en deze functie bestaat niet voor $x = 0$.
De functies $g(x) = \frac{10}{x^2 + b}$ met $b \neq 0$ bestaan wel voor $x = 0$.

e Ja, voor waarden van x ver van 0 nadert de functiewaarde naar 0, dus de grafiek nadert de lijn $y = 0$.

I-4a Voor $x = 1$ bestaat de functie niet.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

b Voor waarden ver van 0 nadert de uitkomst van de breuk naar 0, dus nadert de functiewaarde naar 2.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

c $a = 2$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 2$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.
$a = 3$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 3$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.
$a = 4$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.
$a = 5$
De verticale asymptoot is de lijn $x = 5$.
De horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

I-5a Het is de grafiek bij de formule $y = 4 + \frac{12}{x-2}$

b De grafiek valt samen met die van $y = 4 + \frac{12}{x-2}$

c $y = 4 + \frac{12}{x-2}$ is gelijk aan $y = \frac{4(x-2)}{x-2} + \frac{12}{x-2}$

Optellen geeft $y = \frac{4(x-2)+12}{x-2}$ en dus $y = \frac{4x+4}{x-2}$

d De uitkomst van een breuk is gelijk aan 0 als de teller van de breuk gelijk is aan 0.
De noemer kan geen 0 zijn.

e $\frac{4x+4}{x-2} = 0$ als $4x + 4 = 0$

$4x = -4$

$x = -4 : 4$ dus $x = -1$

I-6a $g(x) = -2 + \frac{5}{x+1}$ is gelijk aan $g(x) = \frac{-2(x+1)}{x+1} + \frac{5}{x+1}$

Optellen geeft $g(x) = \frac{-2(x+1)+5}{x+1}$ en dus $g(x) = \frac{-2x+3}{x+1}$

De functies g en h zijn hetzelfde.

b In het functievoorschrift van g zie je dat de breuk $\frac{5}{x+1}$ naar 0 nadert voor waarden van x ver weg van 0. Dat kun je in het functievoorschrift van h niet zien.
Het functievoorschrift van g is dus handiger om te bepalen welke lijn de horizontale asymptoot is.

c Omdat het functievoorschrift van h als één breuk is geschreven kun je daarmee sneller de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de x-as berekenen.

I-7a De verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

b Dat zijn de lijnen $x = -2$ en $x = 2$.

c De noemer $x^2 + 4$ is voor geen enkele waarde van x gelijk aan 0. Er is dus geen waarde van x waarvoor de functie niet bestaat.

d Voor $b < 0$ zijn er twee verticale asymptoten,
voor $b = 0$ is er één verticale asymptoot en
voor $b > 0$ zijn er geen verticale asymptoten.

Test jezelf

T-1a $f(x) = \frac{4x}{6} + \frac{15x}{6}$

$f(x) = \frac{19x}{6}$

b $g(x) = \frac{7x}{21} + \frac{3x}{21}$

$g(x) = \frac{10x}{21}$

c $h(x) = \frac{12x}{15} - \frac{10x}{15}$

$h(x) = \frac{2x}{15}$

d $i(x) = \frac{2x}{22} - \frac{11x}{22}$

$i(x) = -\frac{9x}{22}$

e $j(x) = \frac{2}{4x}$

$j(x) = \frac{1}{2x}$

f $k(x) = \frac{2x}{14}$

$k(x) = \frac{x}{7}$

g $l(x) = \frac{36x}{6x^2}$

$l(x) = \frac{6}{x}$

h $m(x) = \frac{35x}{42x^2}$

$m(x) = \frac{5}{6x}$

© Noordhoff Uitgevers bv

T-2a $m(x)=\dfrac{4(3x+4)}{4}$ dus $m(x)=3x+4$

b $n(x)=\dfrac{2x(x+4)}{2x\cdot -7}$ dus $n(x)=\dfrac{x+4}{-7}$ of ook $n(x)=-\frac{1}{7}(x+4)$ mits $x\neq 0$

c $p(x)=\dfrac{5x(x-3)}{5x}$ dus $p(x)=x-3$ mits $x\neq 0$

d $q(x)=\dfrac{(x+4)(x+9)}{x+4}$ dus $q(x)=x+9$ mits $x\neq -4$

T-3a $f(x)=\dfrac{2(x+4)}{x+4}+\dfrac{3}{x+4}$ geeft $f(x)=\dfrac{2(x+4)+3}{x+4}$ en dus $f(x)=\dfrac{2x+11}{x+4}$

b $g(x)=\dfrac{-3(x-9)}{x-9}+\dfrac{1}{x-9}$ geeft $g(x)=\dfrac{-3(x-9)+1}{x-9}$ en dus $g(x)=\dfrac{-3x+28}{x-9}$

c $h(x)=\dfrac{2x-7}{2x-7}+\dfrac{9}{2x-7}$ geeft $h(x)=\dfrac{2x-7+9}{2x-7}$ en dus $h(x)=\dfrac{2x+2}{2x-7}$

d $k(x)=\dfrac{5}{3x+2}-\dfrac{7(3x+2)}{3x+2}$ geeft $k(x)=\dfrac{5-7(3x+2)}{3x+2}$ en

$k(x)=\dfrac{5-21x-14}{3x+2}$ dus $k(x)=\dfrac{-21x-9}{3x+2}$

T-4a Als er een verticale asymptoot is, dan moet gelden dat $x^2+9=0$ oftewel $x^2=-9$ en dat kan niet.

b Voor waarden van x ver van 0 nadert de functiewaarde naar 0.
De lijn $y=0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek.

c Als er een verticale asymptoot is, dan moet gelden dat $x^2-9=0$ oftewel $x^2=9$. Dat is zo als $x=3$ en als $x=-3$.
De lijnen $x=3$ en $x=-3$ zijn de verticale asymptoten.

T-5a $\dfrac{2}{x}-3=\frac{1}{2}x+1$

$x\cdot\left(\dfrac{2}{x}-3\right)=x\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ mits $x\neq 0$

$2-3x=\frac{1}{2}x^2+x$

$\frac{1}{2}x^2+4x-2=0$

$D=4^2-4\times\frac{1}{2}\times -2=20$

$x=\dfrac{-4+\sqrt{20}}{2\times\frac{1}{2}}$ of $x=\dfrac{-4-\sqrt{20}}{2\times\frac{1}{2}}$

$x=-4+\sqrt{20}\approx 0{,}47$ of $x=-4-\sqrt{20}\approx -8{,}47$

Verder is $g(-4+\sqrt{20})=\frac{1}{2}\times(-4+\sqrt{20})+1\approx 1{,}24$ en

$g(-4-\sqrt{20})=\frac{1}{2}\times(-4-\sqrt{20})+1\approx -3{,}24$.

De coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g zijn (0,47; 1,24) en (–8,47; –3,24).

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\frac{2}{x} - 3 = -2x + 1$

$x \cdot \left(\frac{2}{x} - 3\right) = x \cdot (-2x + 1)$ mits $x \neq 0$

$2 - 3x = -2x^2 + x$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$, dus is er maar één oplossing.

De grafieken van *h* en *f* hebben één punt gemeenschappelijk.

c $\frac{2}{x} - 3 = -2x - 7$

$x \cdot \left(\frac{2}{x} - 3\right) = x \cdot (-2x - 7)$ mits $x \neq 0$

$2 - 3x = -2x^2 - 7x$

$2x^2 + 4x + 2 = 0$

$D = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$

De grafieken van *i* en *f* hebben één punt gemeenschappelijk.

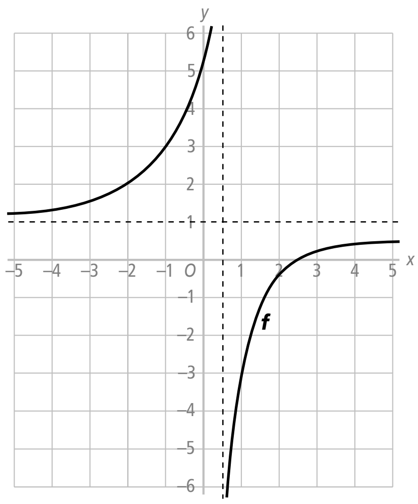
T-6 Iedere lijn met een formule van de vorm $y = -2x + b$ met $-7 < b < 1$ heeft geen punt gemeenschappelijk met de grafiek van *f*. Dus bijvoorbeeld $y = -2x - 3$.

T-7a Voor $x = \frac{1}{2}$ is de noemer van de breuk gelijk aan 0, en is er dus geen functiewaarde.

b

x	–4	–2	0	2	4	6
y	1,44	1,8	5	–0,33	0,43	0,64

c



T-8a De verticale asymptoot is de lijn $x = -1$.

b De horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

c De functievoorschriften *f* en *i* passen bij de grafiek.

© Noordhoff Uitgevers bv